

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

Esercizi svolti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

(a) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$

(b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$

(d) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

(e) $f(x, y) = \log(xy^2 + x^2y)$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = 2x - 5y$

(b) $f(x, y) = x^2y$

(c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

3. Calcolare i seguenti limiti :

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2 + y^2)$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin xy}{x^2 + y^2}$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy - xy^2$

(b) $f(x, y) = ye^{2x^2}$

(c) $f(x, y) = y^2e^{-x}$

(d) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

(e) $f(x, y) = e^{x/y}$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(a) $f(x, y) = xy e^{\sqrt{x+y}}$ in $(0, 0)$

(b) $f(x, y) = |x + y| \sin(x^2 + y)$ in $(0, 0)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0, 0)$

(d) $f(x, y) = (x - y)\sqrt{|y - x^2|}$ in $(1, 1)$

6. Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = e^{|x-y|}$

(b) $f(x, y) = |x| \sin(xy)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{|x + y|}$.

7. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{7x + 4y - 2}}$

(b) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$

(c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$

8. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

(a) $f(x, y) = x^2 + xy - 2$ in $P(1, 0)$ nella direzione $\vec{v} = (2, 1)$

(b) $f(x, y) = e^x \cos y$ in $P(0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 2)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $P(0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 1)$

9. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

(a) $f(x, y) = x^3 - y^3$ nel punto $(0, 1, -1)$

(b) $f(x, y) = x^y + y^x$ nel punto $(1, 1, 2)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(2, 0, 2)$

10. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

(a) $f(x, y) = \sin x \sin y$

(b) $f(x, y) = xe^{xy}$

(c) $f(x, y) = x^2 \sin(y^2)$

11. Data la funzione $f(x, y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$, si verifichi che non è differenziabile in $(1, 0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore v non nullo.

12. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y$

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$

(c) $f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$

(d) $f(x, y) = x \cos y$

(e) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

(f) $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

(g) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$

(h) $f(x, y, z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$

13. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ dei seguenti campi scalare

(a) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3 - z^2$

(b) $f(x, y, z) = y \sin z + x \sin y$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

14. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

(a) $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$

(b) $F(x, y, z) = (x^2 + yz, xyz, x + zy^2)$

(c) $F(x, y, z) = (x \cos z, y \sin x, z \cos y)$.

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

(a) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2) : \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x, y)$ risulta definita per $1 - x^2 - y^2 > 0$, da cui il risultato.

(b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) : \quad D = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x, y)$ risulta definita per $x^2 + y^2 > 0$, cosa verificata per tutti i punti di \mathbf{R}^2 esclusa l'origine degli assi.

(c) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4} : \quad D = \{(x, y) : y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\}$

Essendo \sqrt{x} definita per $x \geq 0$ si ha che $f(x, y)$ risulta definita per $y^2 - x^4 \geq 0 \leftrightarrow y^2 \geq x^4 \leftrightarrow y \geq x^2$ oppure $y \leq -x^2$.

(d) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} : \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbf{Z}\}$

Essendo la funzione \sqrt{x} definita per $x \geq 0$ si ha che la funzione $f(x, y)$ risulta definita per (x, y) tali che $\sin(x^2 + y^2) \geq 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

(e) $f(x, y) = \log(xy^2 + x^2y) : \quad D = \{(x, y) : (x > 0, y > 0) \vee (x < 0, 0 < y < -x) \vee (x > 0, y < -x)\}$

Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x, y)$ risulta definita per $xy^2 + x^2y > 0 \leftrightarrow xy(y + x) > 0$. Studiando il segno delle funzioni xy e $x + y$ separatamente e utilizzando la regola dei segni si ottiene il risultato.

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = 2x - 5y :$

Ponendo $f(x, y) = k$ si ottiene $2x - 5y = k \leftrightarrow 2x - k = 5y \leftrightarrow y = \frac{2x - k}{5}$. $Im(f) = \mathbf{R}$.

(b) $f(x, y) = x^2y$

Ponendo $f(x, y) = k$ si ottiene $x^2y = k \leftrightarrow y = \frac{k}{x^2}$, se $k \neq 0$ e $xy = 0$ (insieme dei punti degli assi) se $k = 0$. $Im(f) = \mathbf{R}$.

(c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

Il dominio della funzione $f(x, y)$ è il semipiano $D = \{(x, y) : y > -1\}$. Le linee di livello saranno quindi tutte contenute in tale semipiano. Ponendo $f(x, y) = k$ e $k > 0$ si ottiene :

$$\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k \leftrightarrow \frac{x^2}{y+1} = k^2 \leftrightarrow x^2 = k^2(y+1) \leftrightarrow y = \frac{x^2}{k^2} - 1.$$

Le linee di livello per $k > 0$ risultano quindi $\{(x, y) \in D : y = \frac{x^2}{k^2} - 1\}$. Si ottiene invece \emptyset per $k < 0$ e $\{(x, y) \in D : x = 0\}$ per $k = 0$. $Im(f) = [0, +\infty)$.

(d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Ponendo $f(x, y) = k$ si ottiene $\frac{1}{x^2 + y^2} = k \leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$, per $k > 0$, e \emptyset per $k \leq 0$. $Im(f) = (0, +\infty)$.

3. Calcolare i seguenti limiti :

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari si ottiene : $\left| \frac{\rho \cos \theta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right| = |\rho \cos \theta \sin^2 \theta| \leq \rho \rightarrow 0$.

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2 + y^2) = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari si ottiene : $|\rho \cos \theta \rho \sin \theta \log(\rho^2)| \leq \rho^2 |\log(\rho^2)| \rightarrow 0$.

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$ non esiste

Pongo $y = mx$ e calcolo il limite lungo le rette passanti per $(0,0)$.

$$\frac{x^3 - 2x(mx) + (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{x^3 - 2mx^2 + m^2x^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{x - 2m + m^2}{(1 + m^2)} \rightarrow \frac{-2m + m^2}{(1 + m^2)} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Siccome il risultato varia al variare della direzione il limite non può esistere.

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$ non esiste

Eseguendo il limite lungo le rette $y = mx$ si ottiene 0. Quindi il limite di $f(x, y)$ è 0 oppure non esiste. Lungo la retta $x = 0$ il limite risulta però essere 1. Il limite quindi non esiste.

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari si ottiene :

$$\left| \frac{\rho \cos \theta \sin(\rho \cos \theta \rho \sin \theta)}{\rho^2} \right| \leq \frac{|\sin(\rho^2 \cos \theta \sin \theta)|}{\rho} \leq \frac{\rho^2 |\cos \theta \sin \theta|}{\rho} \leq \rho \rightarrow 0.$$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$: $\nabla f(x, y) = (2x + 2y - y^2, 2x - 2xy)$

(b) $f(x, y) = ye^{2x^2}$: $\nabla f(x, y) = (4xye^{2x^2}, e^{2x^2})$

(c) $f(x, y) = y^2 e^{-x}$: $\nabla f(x, y) = (-y^2 e^{-x}, 2ye^{-x})$

(d) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$: $\nabla f(x, y) = (\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2})$

(e) $f(x, y) = e^{x/y}$: $\nabla f(x, y) = (\frac{e^{x/y}}{y}, \frac{-xe^{x/y}}{y^2})$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(a) $f(x, y) = xy e^{\sqrt{|x+y|}}$ in $(0,0)$:

Essendo $f(x, y)$ nulla lungo gli assi il gradiente esiste ed è $(0,0)$.

(b) $f(x, y) = |x + y| \sin(x^2 + y)$ in $(0,0)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin(h^2)}{h} = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin(h)}{h} = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

da cui segue $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

(c) $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0, 0)$:

Essendo $f(x, y)$ nulla lungo l'asse y si ha immediatamente che $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1,$$

da cui segue che $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ non esiste, e di conseguenza non esiste $\nabla f(0, 0)$.

(d) $f(x, y) = (x - y)\sqrt{|y - x^2|}$ in $(1, 1)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h, 1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h - 1)\sqrt{|1 - (1 + h)^2|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{|h||2 + h|}}{h} = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 1 + h) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - h - 1)\sqrt{|1 + h - 1|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h\sqrt{|h|}}{h} = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0,$$

da cui segue $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$.

6. Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = e^{|x-y|}$

Essendo composizione di funzioni continue la funzione $f(x, y)$ risulta essere continua su \mathbf{R}^2 . Essendo composizione di funzioni differenziabili la funzione $f(x, y)$ risulta essere differenziabile su

$$\mathbf{R}^2 - \{(x, y) : x = y\}.$$

Essendo l'esistenza delle derivate parziali condizione necessaria per la differenziabilità, inizio con il calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ sulla retta $\{(x, y) : x = y\}$. Pongo (c, c) , con $c \in \mathbf{R}$, generico punto della retta $x = y$ e considero il rapporto incrementale :

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(c + h, c) - f(c, c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{|h|} - 1}{h} = \pm 1$$

Otengo quindi che non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(c, c)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$ e quindi la funzione non risulta differenziabile sulla retta $x = y$.

(b) $f(x, y) = |x| \sin(xy)$

Essendo composizione e prodotto di funzioni continue la funzione $f(x, y)$ risulta essere continua su \mathbf{R}^2 . Essendo composizione di funzioni differenziabili la funzione $f(x, y)$ risulta essere differenziabile su

$$\mathbf{R}^2 - \{(x, y) : x = 0\}.$$

Essendo l'esistenza delle derivate parziali condizione necessaria per la differenziabilità, inizio con il calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ sulla retta $x = 0$. Pongo $(0, c)$, con $c \in \mathbf{R}$, generico punto della retta $x = 0$ e considero il rapporto incrementale :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, c) - f(0, c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin(hc)}{h} = 0$$

Ho quindi dimostrato che $\frac{\partial f}{\partial x}(0, c) = 0$, per ogni $c \in \mathbf{R}$. Essendo $f(x, y)$ nulla sulla retta $x = 0$, ho immediatamente che $\frac{\partial f}{\partial y}(0, c) = 0$, per ogni $c \in \mathbf{R}$, e quindi $\nabla f(0, c) = (0, 0)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$.

Posso a questo punto verificare la differenziabilità di $f(x, y)$ sulla retta $x = 0$ calcolando il seguente limite :

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, c + k) - f(0, c) - \nabla f(0, c)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|h| \sin(h(c + k))}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Passando alle coordinate polari ottengo :

$$\frac{|\rho \cos \theta \sin(\rho \cos \theta(c + \rho \sin \theta))|}{\rho} \leq |\sin(\rho \cos \theta(c + \rho \sin \theta))| \leq \rho |\cos \theta(c + \rho \sin \theta)| \leq \rho |c + \rho \sin \theta| \rightarrow 0$$

$f(x, y)$ risulta quindi differenziabile su \mathbf{R}^2 .

(c) $f(x, y) = \sqrt{|x + y|}$.

Essendo composizione di funzioni continue la funzione $f(x, y)$ risulta essere continua su \mathbf{R}^2 . Essendo composizione di funzioni differenziabili la funzione $f(x, y)$ risulta essere differenziabile su

$$\mathbf{R}^2 - \{(x, y) : y = -x\}.$$

Essendo l'esistenza delle derivate parziali condizione necessaria per la differenziabilità, inizio con il calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ sulla retta $y = -x$. Pongo $(c, -c)$, con $c \in \mathbf{R}$, generico punto della retta $y = -x$ e considero il rapporto incrementale :

$$\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(c+h, -c) - f(c, -c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \pm\infty$$

Otengo quindi che non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(c, -c)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$ e quindi la funzione non risulta differenziabile sulla retta $y = -x$.

7. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{7}{2}(7x+4y-2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2(7x+4y-2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{147}{4}(7x+4y-2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12(7x+4y-2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 21(7x+4y-2)^{-5/2}$$

(b) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2y}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

(c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{2y\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\sqrt{1-x}}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-1}{4y}(1-x)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$$

8. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

(a) $f(x, y) = x^2 + xy - 2$ in $P(1, 0)$ nella direzione $\vec{v} = (2, 1)$

Per definizione $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+2t, t) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+2t)^2 + (1+2t)t - 2 + 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t^2 + 5t}{t} = 5$

Siccome $f(x, y)$ è differenziabile in $(1, 0)$ si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in $(1, 0)$ e il vettore \vec{v} :

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x) \text{ e quindi } \nabla f(1, 0) = (2, 1), \text{ da cui segue } \frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (2, 1) = 5$$

- (b) $f(x, y) = e^x \cos y$ in $P(0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 2)$

Per definizione $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 2t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t \cos(2t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (e^t \cos(2t) - 2e^t \sin(2t)) = 1$

Siccome $f(x, y)$ è differenziabile in $(0, 0)$ si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in $(0, 0)$ e il vettore \vec{v} :

$\nabla f(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$ e quindi $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$, da cui segue :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (1, 2) = 1$$

- (c) $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $P(0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 1)$

Come visto nel punto (c) esercizio 5 la funzione $f(x, y)$ non ammette gradiente. Non rimane quindi che utilizzare la definizione :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t^2 - t^2|}}{t} = 0$$

9. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

- (a) $f(x, y) = x^3 - y^3$ nel punto $(0, 1, -1)$:

$f(0, 1) = -1$, $\nabla f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$ e quindi $\nabla f(0, 1) = (0, -3)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0, 1, -1)$ è quindi : $z = f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \cdot (x, y - 1) = 2 - 3y$.

- (b) $f(x, y) = x^y + y^x$ nel punto $(1, 1, 2)$:

$f(1, 1) = 2$, $\nabla f(x, y) = (yx^{y-1} + y^x \log x, x^y \log y + xy^{x-1})$ e quindi $\nabla f(1, 1) = (1, 1)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(1, 1, 2)$ è quindi : $z = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = x + y$.

- (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(2, 0, 2)$:

$f(2, 0) = 2$, $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$ e quindi $\nabla f(2, 0) = (1, 0)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(2, 0, 2)$ è quindi : $z = f(2, 0) + \nabla f(2, 0) \cdot (x - 2, y) = x$.

10. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

- (a) $f(x, y) = \sin x \sin y$:

$\nabla f(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$ e quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Le derivate di ordine due sono :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sin x \sin y \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \cos x \cos y \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$$

Otengo quindi lo sviluppo : $f(x, y) = xy + o(x^2 + y^2)$.

- (b) $f(x, y) = xe^{xy}$:

$\nabla f(x, y) = (e^{xy} + xy e^{xy}, x^2 e^{xy})$ e quindi $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.

Le derivate di ordine due sono :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y e^{xy} + xy^2 e^{xy} \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^3 e^{xy} \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$$

Otengo quindi lo sviluppo : $f(x, y) = x + o(x^2 + y^2)$.

(c) $f(x, y) = x^2 \sin(y^2)$:

$\nabla f(x, y) = (2x \sin y^2, 2yx^2 \cos y^2)$ e quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Le derivate di ordine due sono :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \sin y^2 \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -4y^2 x^2 \sin y^2 + 2x^2 \cos y^2 \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy \cos y^2 \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$$

Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x, y) = o(x^2 + y^2)$.

11. Data la funzione $f(x, y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$, si verifichi che non è differenziabile in $(1, 0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore v non nullo.

Pongo $\vec{v} = (a, b)$. Per definizione si ha che : $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + at, bt) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt[3]{(at)^2 bt} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt[3]{a^2 b}}{t} = \sqrt[3]{a^2 b}$, da cui segue $\nabla f(1, 0) = (0, 0)$. Non essendo verificata la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{v}$, concludo quindi che $f(x, y)$ non è differenziabile in $(1, 0)$.

12. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y$:

Calcolo il gradiente di $f(x, y)$: $\nabla f(x, y) = (2x + 2xy, x^2 - 2)$. Ponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottengono i due punti stazionari $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$. Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservo che $H(\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $H(-\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ sono entrambe indefinite. I due punti stazionari sono quindi due punti di sella.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$:

Calcolo il gradiente di $f(x, y)$: $\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$. Ponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottengono i due punti stazionari $(0, 0)$ e $(-1/3, -1/3)$. Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$, e osservo che $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice indefinita) e $H(-1/3, -1/3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (matrice definita negativa). Il punto $(0, 0)$ risulta quindi essere una sella e il punto $(-1/3, -1/3)$ un massimo relativo.

(c) $f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$:

Essendo la funzione logaritmo una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione $g(x, y) = 1 + x^2 y^2$. Calcolo il gradiente di $g(x, y)$: $\nabla g(x, y) = (2xy^2, 2yx^2)$. Ponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottiene che tutti i punti dei due assi coordinati sono punti stazionari. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Purtroppo la matrice Hessiana risulta nulla su $(0, 0)$ e solo semidefinita sugli altri punti dei due assi. In ogni caso quindi non posso concludere nulla sulla natura dei punti stazionari. Posso però concludere con la seguente argomentazione : $x^2 y^2 \geq 0 \rightarrow 1 + x^2 y^2 \geq 1 \rightarrow f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2) \geq 0$. Essendo $f(x, y)$ nulla sugli assi, tutti i punti stazionari risultano essere punti di minimo assoluto e quindi di minimo relativo.

(d) $f(x, y) = x \cos y$:

Calcolo il gradiente di $f(x, y)$: $\nabla f(x, y) = (\cos y, -x \sin y)$. Ponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottengono gli infiniti punti stazionari $P_k = (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, per $k \in \mathbf{Z}$. Per determinare la natura dei punti stazionari P_k calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x \cos y \end{pmatrix},$$

e osservo che $H(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice indefinita. Gli infiniti punti stazionari P_k sono quindi tutti punti di sella.

(e) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$:

Essendo la funzione radice una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Calcolo il gradiente di $g(x, y)$: $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Ponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottiene l'unico punto stazionario $(0, 0)$. Per determinare la natura del punto stazionario calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

matrice definita positiva. Il punto $(0, 0)$ risulta quindi essere punto di minimo locale per la funzione $g(x, y)$, e di conseguenza anche per la funzione $f(x, y)$. Si osservi che $(0, 0)$ è anche punto di minimo assoluto per $g(x, y)$ e quindi per $f(x, y)$, essendo $g(0, 0) = 1$ e $g(x, y) \geq 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(f) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$:

Essendo la funzione e^{-x} una funzione strettamente decrescente su \mathbf{R} posso ridurmi a studiare la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$. In modo perfettamente analogo all'esercizio precedente ottengo che la funzione $g(x, y)$ ha il solo punto stazionario $(0, 0)$, che risulta essere punto di minimo locale e assoluto. Posso quindi concludere che la funzione $f(x, y)$ ha il solo punto stazionario $(0, 0)$, che risulta essere punto di massimo locale e assoluto.

(g) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$:

Calcolo il gradiente di $f(x, y)$: $\nabla f(x, y) = (\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2})$. Si ha quindi che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ non è mai verificata sul dominio $D = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Non esistono quindi punti stazionari.

(h) $f(x, y, z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$:

Calcolo il gradiente di $f(x, y, z)$: $\nabla f(x, y, z) = (8x^3 + 8y, 8y^3 + 8x, 8z^3)$. Ponendo $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si ottengono i tre punti stazionari $(0, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 0)$. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 24x^2 & 8 & 0 \\ 8 & 24y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 24z^2 \end{pmatrix}.$$

Osservo che

$$H(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice indefinita})$$

$$H(1, -1, 0) = H(-1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 8 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice definita positiva}).$$

Ho quindi che $(0, 0, 0)$ risulta punto di sella e i punti $(1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 0)$ risultano invece di minimo relativo.

13. Calcolare ∇f e Δf (Laplaciano di f) dei seguenti campi scalare

(a) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3 - z^2$: $\nabla f(x, y, z) = (y^2, 2xy + z^3, 3yz^2 - 2z)$ $\Delta f(x, y, z) = 2x + 6yz - 2$

(b) $f(x, y, z) = y \sin z + x \sin y$: $\nabla f(x, y, z) = (\sin y, \sin z + x \cos y, y \cos z)$ $\Delta f(x, y, z) = -x \sin y - y \sin z$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: $\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z)$ $\Delta f(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

14. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

(a) $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (-y, -z, -x)$$

(b) $F(x, y, z) = (x^2 + yz, xyz, x + zy^2)$:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 2x + xz + y^2$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = (2yz - yx, y - 1, yz - z)$$

(c) $F(x, y, z) = (x \cos z, y \sin x, z \cos y)$:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \cos z + \sin x + \cos y$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = (-z \sin y, -x \sin z, y \cos x)$$